**Методы математической физики**

*I. Вариационное исчисление.*

1. Вариационные задачи без условий связи. Примеры простейших вариационных задач: о брахистохроне, о геодезических, о линии наименьшей длины, ограничивающей заданную площадь. Понятие функционала. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от одной или нескольких функций одной переменной, с неподвижными границами. Первая вариация. Лемма Лагранжа. Уравнение Эйлера и система уравнений Эйлера-Лагранжа. Принцип Гамильтона. Закон сохранения энергии. Вариационные задачи для функционалов, зависящих от старших производных. Вариационные задачи со свободной границей. Естественные граничные условия. Задачи с подвижными концами. Условия трансверсальности.

2. Вариационные задачи со связями. Изопериметрическая задача. Задача с голономными и не голономными связями.

3. Квадратичный функционал и оператор Штурма-Лиувилля. Уравнение Штурма – уравнение Эйлера для квадратичного функционала. Линейный оператор, собственные функции и собственные значения линейного оператора. Оператор Штурма с постоянными коэффициентами: свойства его собственных значений и собственных функций, как аналог свойств для оператора Штурма с переменными коэффициентами. Пространство L2[ab]. (не строго): скалярное произведение и норма в L2[ab]. Эрмитовы операторы в пространствах со скалярным произведением (определение). Что-то собственных значений, ортогональность собственных функций для различных собственных значений. Эрмитовость оператора Штурма. Невырожденность собственных значений. Вариационные свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма. Принцип минимакса. Теорема сравнения. Разложение по бесконечным (?) ортонормированным системам. Равенство Парсеваля. Неравенство Бесселя. Теорема Стеклова – (сходимость в L2и равномерная – при разложении f(x) в DL, разные типы граничных условий).

4. Обобщенная задача Штурма-Лиувилля и функции Бесселя. Обобщенная задача Штурма. «Сведение» к обычной задаче Штурма введением нового скалярного произведения. Квадратичный функционал с условием Уравнение Бесселя и уравнение Эйлера для функционала . Функции Бесселя. Нули функций Бесселя ν-го порядка – числа *µ*vk. Свойства функций Бесселя функционала (*µ*vk x/R) k=1,2…как собственных функций обобщенной задачи штурма.

5)Вариационные задачи для функционалов от функций нескольких переменных. Уравнение Шредингера. Постановка задачи. Общий вид 1-й вариации. Уравнение Остроградского. Естественные граничные условия в случае свободной границы. Квадратичный функционал и уравнение Шредингера. Свойства собственных функций операторов Шредингера и Лапласа. (Сходство и различия с оператором штурма). Теоремы сравнения. Теорема Стеклова (без доказательства). Понятие о свойствах оператора Шредингера в неограниченной области: дискретный и непрерывный спектр.

*II. Уравнения математической физики.*

1. Малые колебания струны. Вывод уравнения и граничных условий с помощью принципа Гамильтона. Типы граничных условий в различных физических ситуациях (свободные концы, заданный закон движения, наличие сосредоточенной силы, упругое закрепление). Начальные условия. Понятие о корректности постановки задачи для уравнения в частных производных ( на примере уравнения колебаний струны). Интеграл энергии и единственность решения – для различных граничных условий.

2. Метод Фурье (колебательные задачи для одномерных систем). Решение задачи о свободных колебаниях однородной струны. Условия сходимости полученных рядов (доказательство с использованием скорости роста собственных значений). Влияние типов однородных граничных условий на вид решения. Свободные колебания неоднородной струны. Вынужденные колебания однородной струны (стационарные и нестационарные вынужденные силы). Функция Грина и её физический смысл. Неоднородные граничные условия. Методика перевода неоднородностей из граничных условий в уравнение. Вывод и решение телеграфных уравнений. Типы граничных условий. Линии, свободное от искажения. Случай несогласованных граничных и начальных условий.

3. Метод Фурье (колебания K-мерных систем, К2)  
Вывод уравнений колебаний мембраны произвольной формы с помощью принципа Гамильтона. Граничные и начальные условия. Применение метода Фурье. Вынужденные колебания (общий подход). Колебания прямоугольной и круглой мембраны. Уравнение Бесселя и функции Бесселя n-го порядка.

4. Функции Бесселя. Гамма-функция.  
Функции Бесселя, Неймана и их свойства: разложения в ряд, нули, наличие особенностей, асимптоматика. Модифицированные функции Бесселя. Функция Бесселя полуцелого аргумента. Функции Бесселя как собственные функции обобщенной задачи Штурма (ортогональность с весом, теорема Стеклова).

5. Уравнение теплопроводности. Вывод уравнения теплопроводности для тела произвольной формы исходя из уравнения теплового баланса. Типы граничных условий. Задача о распространении тепла в однородном стержне: доказательство единственности (с помощью принципа максимума) и через него построение решения методом Фурье. Функция Грина для рассматриваемой задачи и её свойства. Решение неоднородного уравнения теплопроводности методом Фурье. Запись решения с помощью функции Грина.

6. Разложение дельта-функции в ряды по собственным функциям оператора Штурма. Нахождение функции Грина в задачах теплопроводности с помощью дельта-функции.

7. Интегральные преобразования. Смысл и цель интегральных преобразований при решении уравнений в частных производных. Преобразование Лапласа и формула обращения для этого преобразования. Применение к задачам теплопроводности: 1) для полубесконечного стержня с условием U (0, t) = U0, U (x, a) = 0. 2) Для бесконечного цилиндра при U()=0, U(R,=U0, t>0. Лемма Жордана. Синус-косинус преобразования. Условия их применения, формулы обращения. Решение задачи 1) с помощью синус преобразования, косинус преобразования в задаче о колебаниях полубесконечной струны со свободным концом. Применение двух ИП к одной задаче. Преобразование Фурье. Условия применения, формула обращения. Примечание 1) к задаче о распространении тепла в бесконечном стержне – построение функции Грина и нахождение решения преобразованием Бесселя (?), условия применения, формула обращения. Задача о поле наэлектризованного диска. Задача о профиле (?) бесконечной мембраны при действии силы.